

The Generalized Extreme Value Model for Seismic Hazard Estimation of Potential Source Area based on Maximum Information Entropy Principle

Luchuan Ren, Zhe Liu, Jianwei Tian

Institute of Disaster Prevention, China Earthquake Administration, Beijing East Yanjiao 101601, China

基于最大信息熵原理构建潜源区强震危险性估计广义极值模型

任鲁川, 刘哲, 田建伟

中国地震局防灾科技学院, 北京东燕郊 101601

Abstract

The author proposes a method to establish the generalized extreme value model for strong earthquake hazard estimation of a potential source area, based on the maximum information entropy principle and corresponding constraint conditions, and then selects the Ryukyu trench subduction zone as a potential seismic source area for case study. The results show: Considering that the Weibull distribution, among the three kinds of generalized extreme value distribution, has limited upper extreme point, and the upper bound magnitude of a potential seismic source area should be limited, therefore the Weibull distribution model should be selected to establish the generalized extreme value model for strong earthquake hazard estimation; Under the condition that the upper bound magnitude of a potential seismic source area be limited, and in according with the maximum information entropy principle, the probability density function of the maximum magnitude of a potential seismic source area, in

each time interval, can be expressed as a general formula with three parameters, and these parameters can be calculated from the estimated values of shape parameter, location parameter and scale parameter of the corresponding Weibull distribution.

Keywords: maximum information entropy principle; generalized extreme value model; potential seismic source area; seismic hazard estimation

摘要

提出在符合最大信息熵原理并满足相应约束条件的情况下, 构建潜源区强震危险性估计广义极值模型的方法, 并选琉球海沟俯冲带潜源区进行案例研究。结论如下: 因为潜源区震级上限为有限值, 所以构建潜源区强震危险性估计广义极值模型应取 Weibull 分布; 在满足潜源区震级上限为有限值的约束条件下, 可用符合最大信息熵原理的概率分布通式表示潜源区各个等长时段最大震级的概率分布函数; 该通式含三个参数, 其值可由上述 Weibull 分布的形状参数、位置参数和尺度参数估计值求

得。

关键词：最大信息熵原理；广义极值模型；潜源区；强震危险性估计

1. 引言

目前有两类潜源区强震危险性估计方法，一是地震统计学方法，一是特征地震方法[1]。前者基于震级-频度关系，通过统计分析历史史料记载和地震仪记录的潜源区地震数据，估计强震危险性[2][3]；依据最大信息熵原理可以解释震级-频度关系的物理意义[4-10]。后者基于古地震或历史地震遗迹考察，依据推断的断层滑动速率，估计该断层特征地震的重现时间；通过描述断层行为的简单力学模式可以定性解释强震危险性估计结果[10]。两类方法都有局限。地震统计学方法在大震级区段往往出现所谓“掉头”现象[11,12]。由于野外环境和考察条件的限制，许多潜源区难以采用特征地震方法。近年，广义极值模型逐渐被应用到潜源区强震危险性估计，这类模型不仅无需先验地选定震级上限，可以更充分地利用大震级区段的信息[3,13-18]，但其所蕴含的物理意义未见深入分析和探讨。

本文首先介绍熵的有关概念和最大信息熵原理，然后讨论在有关地震学原理和最大信息熵原理的约束下，构建潜源区强震危险性估计广义极值模型的方法，最后选琉球海沟俯冲带潜源区进行案例研究。

2. 熵的概念和最大信息熵原理

2.1. 熵的有关概念

1854年，克劳修斯(Clausius)在热力学研究中引入了一个新的态函数—熵(entropy)，被称为克劳修斯熵或热力学熵。对于无限小过程，热力学第二定律可以表示成熵的微分形式

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad (2-1)$$

式中，符号 S 表示熵，Q 表示热量，T 表示温度，等号对应于可逆过程，不等号对应于不可逆过程[19]。1896 年玻尔兹曼(Boltzmann)

建立了熵与系统宏观态所对应的可能的微观

态数目的联系： $S \propto \ln W$ ，式中 S 表示熵，W 表示微观态数目。1900 年，普朗克(Planck)引进了玻尔兹曼常量 K，给出玻尔兹曼-普朗克公式

$$S = K \ln W \quad (2-2)$$

此式所定义的熵被称为统计熵。统计熵揭示了热力学第二定律的统计本质：熵增加原理表示孤立系统中热力学过程的方向性，相应于系统从热力学概率小的状态向热力学概率大的状态过渡，平衡态的热力学概率最大，对应于统计熵为极大值的状态，熵自发减小的过程不是绝对不可能，只不过概率非常小而已。1948 年仙农(Shannon)发表了《通信的数学理论》，使用概率方法，奠定了现代信息论的基础。他提出了被称为仙农熵的信源信息熵概念，用

$$H(X) = -\sum_i P(a_i) \log_2 P(a_i) \quad (2-3)$$

表示信源输出每个消息所提供的平均信息量，其中 a_i 为信源可能取的消息， $P(a_i)$ 为选择信源符号 a_i 作为消息的先验概率。1957 年詹尼斯(Jaynes)将信息熵引入统计力学，给出的信息熵定义：

$$S = -k \sum_i P_i \ln P_i \quad (2-4)$$

此式比仙农熵表达式多一比例系数[20-22]。

2.2. 最大信息熵原理

1957 年杰尼斯(E.T.Jaynes)提出最大信息熵原理：在只掌握部分信息的情况下，对未知的分布形态做推断，应该选择符合约束条件同时信息熵最大的概率分布，任何其他选择都意味着添加额外的约束，而且根据所掌握的信息这些额外的约束是无法做出的。最大信息熵原理是一种选择随机变量统计特性最符合客观情况的一个准则。一般而言，随机量的概率分布是很难测定的，通常只能测得其各种均值(如数学期望、方差等)或已知某些限定条件下的值(如峰值、取值个数等)，与这些测值相符合的分布可有多种以至无穷多种，但其中仅有一种分布的信息熵

最大。选用这种具有最大信息熵的分布作为随机变量的分布，是一种有效的处理方法和准则 [22]。

2.3. 基于最大信息熵原理的连续型随机变量分布

给定约束条件，由最大信息熵原理求“最佳”概率分布是一求解条件极值问题。设 X 为连续随机变量，p(x) 为概率密度函数，若 X 的若干函数 f_m(x) 的数学期望满足约束条件

$$\int p(x)dx = 1 \tag{2-5}$$

$$\int p(x)f_m(x)dx = C_m \tag{2-6}$$

m=1, 2, ..., M, C_m 为常数。信息熵表达式为：

$$H(x) = -\int p(x) \log p(x) dx \tag{2-7}$$

令

$$G(x) = H(x) + (\lambda_0 + 1) \left[\int p(x) dx - 1 \right] + \sum_{m=1}^M \lambda_m \left[\int p(x) f_m(x) dx - C_m \right]$$

利用拉格朗日乘子法可导出满足随机变量 X 的信息熵 H 最大的概率分布：

$$p(x) = \exp \left[\lambda_0 + \sum_{m=1}^M \lambda_m f_m(x) \right] \tag{2-8}$$

可见，基于最大信息熵原理，依据上述约束条件，连续型随机变量 X 的概率密度分布函数的通式可以表示为 e 的负指数次幂的形式 [23,24]。

3. 潜源区强震危险性估计广义极值模型构建

本节论述将广义极值建模原理与最大信息熵原理 [22,25] 相结合构建潜源区强震危险性估计模型的方法。广义极值分布 (the generalized extreme value distributions) 为：

$$F(x) = \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] \tag{3-1}$$

$1 + \xi(x - \mu) / \sigma > 0$

式中 ξ 为形状参数 (shape parameter)，μ 为位置参数 (location parameter)，σ 为尺度参数 (scale parameter)，μ, ξ 定义域为实数域 R，σ > 0。ξ = 0 时为 Gumbel 分布，ξ > 0 时为 Frechet 分布，ξ < 0 时为 Weibull 分布。相应的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-(1+1/\xi)} \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] \tag{2-2}$$

迄今地震仪器监测记录到的震级最大地震是矩震级 9.5 级的 1960 年 5 月 22 日智利大地震。特定潜在震源区所发生地震的震级上限必定为有限值，一般认为不会超过矩震级 10 级。考虑到三类广义极值分布中仅 Weibull 分布具有有限上端点，所以我们构建强震危险性估计的广义极值模型应取 Weibull 分布。

为下文处理的方便，令 α=1/ξ, μ-ασ=δ, ασ=β, (2-1) 和 (2-2) 变为

$$F(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - \delta}{\beta} \right)^{\alpha} \right], \alpha < 0 \text{ 和 } \beta < 0 \tag{3-3}$$

$$p(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x - \delta}{\beta} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{x - \delta}{\beta} \right)^{\alpha} \right], x < \delta \tag{3-4}$$

选定某一潜源区，再选定一定时限并将之划分为一系列相等的时段，提取各个时段的最大震级样本，由这些样本拟合求得最大震级的概率密度分布，它应能表示为式 (2-4) 的 Weibull 分布的形式，否则就说明潜源区界定或获取最大震级样本的方法不合理。另一方面，可以认为上述最大震级的概率密度分布应满足最大信息熵原理及上述约束条件，这意味着它也可表示为式 (2-8) 的形式。取式 (2-8) 前三项，则

$$p(x) = \exp(\lambda_0 + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \tag{3-5}$$

取式 (3-4) 和 (3-5) 的自然对数，得到

$$\ln p(x) = \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) - (\alpha + 1) \ln \left(\frac{x - \delta}{\beta} \right) - \left(\frac{x - \delta}{\beta} \right)^{\alpha} \tag{3-6}$$

$$\ln p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \quad (3-7)$$

令上两式相等, 则

$$\lambda_0 = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (3-8)$$

$$\lambda_1 = -(\alpha + 1) \quad (3-9)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad (3-10)$$

$$f_1(x) = \ln\left(\frac{x-\delta}{\beta}\right) \quad (3-11)$$

$$f_2(x) = \left(\frac{x-\delta}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad (3-12)$$

4. 应用案例

以琉球海沟俯冲带为潜源区 (22° N-32.5° N, 120.5° E-133° E) 进行案例研究 (图 1)。琉球海沟俯冲带属于沟-弧-盆体系, 其中的“沟”指的是琉球海沟, 它是沟-弧-盆体系与大洋盆地的天然分界线, 在地貌上表现为岛坡坡麓的深沟, 它是一条向东南凸出, 向西北倾没的弧形海沟, 呈环带状环绕琉球岛弧延伸, 北端以九州-帛琉海岭为界, 南端位于台湾岛中部外海, 总长约 1350 米, 平均宽度 60km, 平均水深在 6000 米以上, 最大水深 7781m。琉球海沟的西坡是具有大陆性质琉球岛弧, 是由琉球诸岛形成的岛链, 称之为琉球岛弧, 北起九州岛的南部, 南到台湾岛东部,

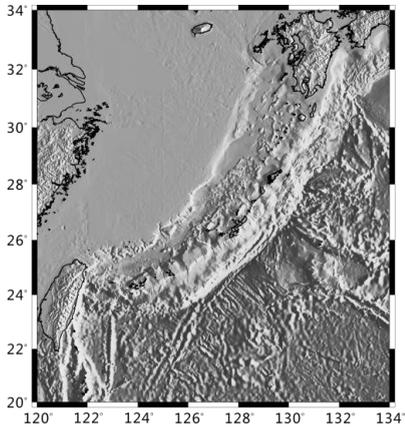


图 1. 琉球海沟俯冲带地理位置

全长 1200 公里, 属于双列岛弧, 内弧主要是

古琉球火山带形成的一条水下火山脊, 外弧是琉球群岛的主体, 地貌分布格局主要由三个构造--琉球群岛隆褶带, 弧前盆地和八重山海脊带控制。琉球岛弧的西侧是冲绳海槽, 为一正在发育的弧后裂谷盆地, 目前仍是大陆地壳。

历史地震记录取自美国地质调查局网站 (www.usgs.gov), 时限 1900-2010 年。以 10 年为一时间时段, 得到 11 个时间时段的最大震级数据序列 (表 1)。对 11 个震级数据进行广义极值拟合, 得到广义极值分布三个参数的极大似然估计值及其标准差 (表 2)。形状参数 ξ 的估计值是负值, 说明估计得到的分布形式为 Weibull 分布。诊断 (图 2) 结果显示: 概率和分位数的诊断图中 (图 2a,图 2b) 的数据点近似与直线拟合, 说明模型估计值与经验分析值趋于一致; 重现水平曲线 (图 2 c) 上端逐渐趋向一有限值, 说明估计所得的模型属于广义极值三种分布中的 Weibull 分布; 概率密度曲线的估计与直方图 (图 2d) 具有一定程度的拟合度。总之, 诊断结果不能否定广义极值模型拟合的适用性。

表 1. 最大震级数据 (时限 1900-2010, 时段 10 年)

时段	最大震级(Mw)
1900-1910	8.1
1910-1920	8.2
1920-1930	7.7
1930-1940	7.9
1940-1950	7.5
1950-1960	7.8
1960-1970	7.5
1970-1980	7.4
1980-1990	7.4
1990-2000	7.7
2000-2010	7.1

表 2. 广义极值分布三个参数的极大似然对数估计值及其标准差

	位置参数	形状参数	尺度参数
估计值	7.56	-0.32	0.31
标准差	0.11	0.29	0.08

将 Weibull 分布的三个参数的估计值代入上限震级计算公式 $z_0 = \mu - \sigma / \xi$, 可得到琉球海沟俯冲带上限震级估计值为 8.53 级。将 Weibull 分布的三个参数估计值代入 $\alpha=1/\xi$, $\mu-\alpha\sigma=\delta$, $\alpha\sigma=\beta$, 再将计算所得值代入式 (3-8) - (3-12), 由公式 (3-5), 得到琉球海沟俯冲带满足最大熵原理的最大震级分布的概率密度函数为:

$$p(x) = \exp\left[1.17 + 2.13 \ln\left(\frac{x-8.53}{-0.97}\right) - \left(\frac{x-8.53}{-0.97}\right)^{3.13}\right] \quad (4-1)$$

(2) 潜源区各个时段最大震级的概率分布密度函数可用符合最大信息熵原理的包含三个参数的概率分布通式表示, 且这三个参数可用估计得到的 Weibull 分布中的形状参数、位置参数和尺度参数值求得。

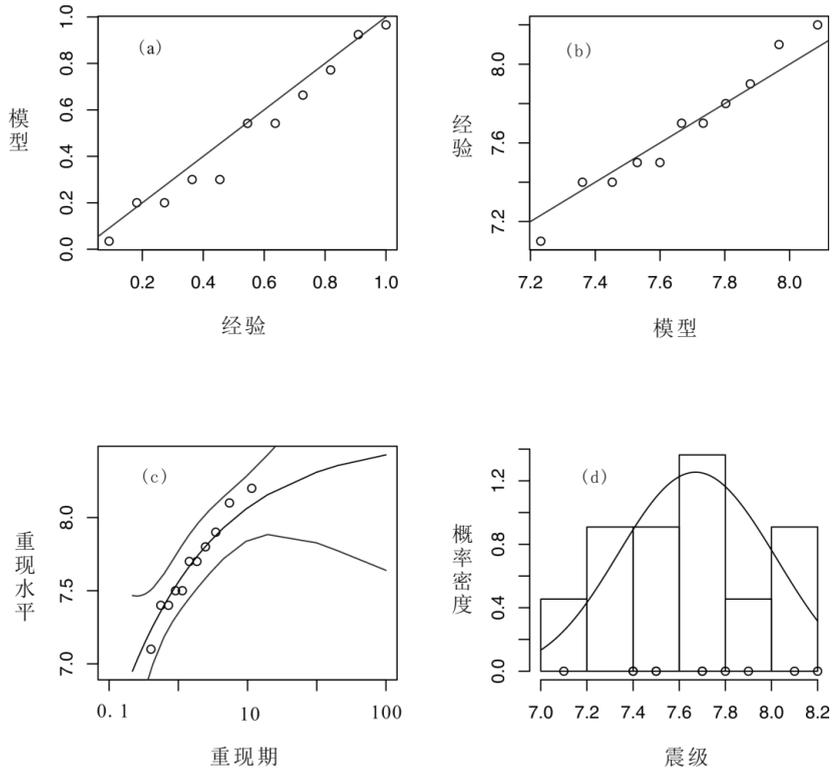


图 2. 广义极值模型拟合最大震级数据的诊断图。(a)概率图, (b)分位数图, (c)重现水平图 (d)概率密度图

5. 结论

(1) 鉴于所有三类广义极值分布中仅只 Weibull 分布具有有限的上端点, 再考虑到潜源区震级上限必定为有限值, 构建强震危险性估计的广义极值模型应选取 Weibull 分布模型。

致谢

本研究得到了国家自然科学基金项目 (No. 41276020) 和中央高校基本科研业务费 (ZY20160312)、中央高校基本科研业务费 (ZY20160311) 的资助。

参考文献

- [1] 任鲁川, 霍振香, 洪明理. 耦合潜源参数不确定性效应的地震海啸危险性分析—原理与方法. 海洋预报, 12(6): 7-13, 2014.
- [2] Cosentino P, Ficarra V, Luzio D. Truncated exponential frequency-magnitude relationship in earthquake statistics. Bulletin of the Seismological Society of America, 67(6):1615-1623, 1977.
- [3] Pisarenko V F, Sornette A, Sornette D, et al. Characterization of the Tail of the Distribution of Earthquake Magnitudes by Combining the GEV and GPD Descriptions of Extreme Value Theory. Pure & Applied Geophysics, 171(8):1599-1624, 2014.
- [4] J. B. Berrill, R. O. Davis. Maximum entropy and the magnitude distribution. Bulletin of the Seismological Society of America, (5):1823-1831, 1980.
- [5] Shen P Y, Mansinha L. On the principle of maximum entropy and the earthquake frequency-magnitude relation. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 74(3):777-785, 1983.
- [6] 成尔林, 张美芳. 最大熵原理在地震重复关系中的应用. 地震研究, 10(2): 139-144, 1987.
- [7] 彭美焯. 最大熵原理和综合概率法在计算地震年发生率和平均重现期中的应用. 地震, (3):38-43, 1993.
- [8] 冯利华. 最大熵原理与地震频度—震级关系. 地震地质, 25(2):260-265, 2003.
- [9] Angelo De Santis, Gianfranco Cianchini, Paolo Favali, Laura Beranzoli and Enzo Boschi. The Gutenberg-Richter Law and Entropy of Earthquakes: Two Case Studies in Central Italy, Bulletin of the Seismological Society of America, 101:1386-1395, 2011.
- [10] S.G. Wesnousky, 刘新美. 古登堡-里克特分布还是特征地震分布. 世界地震译丛(5): 43-62, 1995.
- [11] 胡聿贤. 地震安全性评价技术教程[M], 北京: 地震出版社, 1999.
- [12] Raschke M. Modeling of magnitude distributions by the generalized truncated exponential distribution. Journal of Seismology, 19(1):1-7, 2014.
- [13] Pisarenko V F, Sornette A, Sornette D, et al. New Approach to the Characterization of M_{max} and of the Tail of the Distribution of Earthquake Magnitudes. Pure & Applied Geophysics, 165(5):847-888, 2008.
- [14] Raschke M. Comment on Pisarenko et al. "Characterization of the Tail of the Distribution of Earthquake Magnitudes by Combining the GEV and GPD Descriptions of Extreme Value Theory". Pure & Applied Geophysics. 112(1):1-7, 2015.
- [15] 钱小仕, 王福昌, 曹桂荣, 任晴晴. 广义极值分布在地震危险性分析中的应用. 地震研究, 35(1): 73-78, 2012.
- [16] 钱小仕, 王福昌, 盛书中. 基于广义帕累托分布的地震震级分布尾部特征分. 地震学报, 35(3):341-350, 2013a.
- [17] 钱小仕, 蔡晓光, 任晴晴. 中国大陆活动地块边界带强震震级分布特征研究. 地震工程与工程动, 33(1):212-220, 2013b.
- [18] 任晴晴, 钱小仕, 赵玲玲, 霍振香. 中国大陆活动地块边界带最大震级分布特征研究. 地震, 33(3), 67-76, 2013.
- [19] 王竹溪. 《热力学简程》, 北京: 人民教育出版社, 1964.
- [20] 任鲁川. 灾害熵: 概念引入及应用案例. 自然灾害学报, 02(2):26-31, 2000.
- [21] 李鹤龄. 信息熵、玻尔兹曼熵以及克劳修斯熵之间的关系——兼论玻尔兹曼熵和克劳修斯熵是否等价. 大学物理, 23(12):37-40, 2004.
- [22] 石峰, 莫忠息. 《信息论基础》, 武昌: 武汉大学出版社, 2002.
- [23] 李宪东. 基于最大熵原理的确定概率分布的方法研究. 华北电力大学(北京), 2008.
- [24] 余海, 陈勇, 周钦. 基于最大熵原理的风险分析先验概率分布确定方法. 中国科技信息, (4):276-277, 2008.
- [25] Stuart Coles. An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. Springer-Verlag London limited. Printed in Great Britain, 200.